Capítulo 1

Transformadas Integrales

Muchos problemas que surgen en la ingeniería exigen un cálculo complicado. Algunos de estos problemas se pueden hacer más operativos mediante las llamadas transformaciones integrales que consisten, básicamente en "transformar " el problema, resolver el problema transformado y finalmente, deshacer la transformación para obtener así la solución del problema original.

Sea $N(z,t)$ una función de las variables t y z y supongamos que para una función (real o compleja) dada $f(t)$ la integral

$$T[f](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(z,t) \cdot f(t)\ dt$$

existe. Obtenemos así una nueva función $T[f](z)$ a la que llamamos transformada integral de la función $f(t)$ respecto al núcleo $N(t,z)$. Generalmente las funciones originales se denotan por minúsculas y sus transformadas por las mismas letras en mayúsculas.

Dependiendo de la elección que se haga del núcleo $N(t,z)$ tendremos distintos tipos de transformadas integrales. La transformada de Laplace y la transformada de Fourier son dos de estos tipos de transformadas integrales. Las primeras se corresponden con el núcleo $N(t,z) = e^{-zt}$ para funciones $f(t)$ que son nulas si $t < 0$, obteniéndose así la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_{0}^{+\infty} e^{-zt} f(t)\ dt$$

mientras que la transformada de Fourier se corresponde con el núcleo dado por $N(t,z) = e^{-izt}$, es decir,

$$\mathcal{F}[f(t)](z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izt} f(t)\ dt,$$

siempre que dichas integrales existan.

1.1. Transformada de Laplace

La integral
$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) \;\; dt \tag{1.1}$$
es una integral impropia que está definida por
$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt = \lim_{a \longrightarrow +\infty} \int_0^{a} e^{-zt} f(t)\, dt$$
siempre que el límite anterior exista y sea finito, es decir, cuando la integral (1.1) sea convergente.

Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ una función localmente integrable, es decir, existe la integral de Riemann de f en todo intervalo compacto $[0, a] \subset [0, +\infty[$. Llamaremos **transformada de Laplace** de $f(t)$ en $z \in \mathbb{C}$ a la función compleja de variable compleja definida por la integral
$$T[f](z) = \mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\, dt \text{ para todo } z \in D \tag{1.2}$$
siendo D el conjunto de todos los valores z para los cuales la integral anterior existe, es decir, tiene un valor finito. Al conjunto D lo llamaremos **dominio de la transformada de Laplace**. La variable t suele representar el tiempo mientras que la variable z representa la frecuencia (por este motivo se suele decir que la transformada de Laplace actúa en el dominio de la frecuencia)

Ejemplo 1 ***Función característica de un intervalo***
Obtener la transformada de Laplace de las funciones complejas $\chi_{[a,b]}(t)$ *donde* $0 \leq a < b$ *y* $\chi_{[a,+\infty]}(t)$.

Ejemplo 2 *Obtener la transformada de Laplace de la función lineal*
$$f(t) = wt$$
con $w \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3 ***Potencias***
Obtener la transformada de Laplace de la función
$$f(t) = t^n$$
con $n \geq 1$.

Ejemplo 4 *Determinar la transformada de Laplace de la función* e^{wt} *con* $w \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 5 *Determinar la transformada de Laplace de la función*

$$f(t) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 < t < 5 \\ \\ 0 & si \quad 5 < t < 10 \\ \\ e^{4t} & si \quad 10 < t. \end{cases}$$

1.2. Existencia de la transformada de Laplace

Como la transformada de Laplace se define en términos de una integral impropia que puede ser divergente, existen funciones para las cuales no existe dicha transformada. Vamos a estudiar bajo qué condiciones una función admite transformada de Laplace.

Una de las ideas importantes en el estudio de la existencia de la transformada de Laplace es que entendemos porqué una función no crezca demasiado rápido. Diremos que $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ tiene **orden exponencial** (**de orden** γ) si existe $M, T > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t} \qquad \text{para todo } t > T. \tag{1.3}$$

Lo que nos dice esta definición es que una función es de orden exponencial si no crece más rápido que una función exponencial de la forma $Me^{\gamma t}$. Afortunadamente la mayoría de las funciones de significado práctico satisfacen este requerimiento, y por tanto son de orden exponencial. Algunas veces, para verificar que una función f es de orden exponencial, conviene calcular el límite

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\gamma t}} = L$$

para algún valor de γ. Si L es finito, entonces M puede ser cualquier número mayor que L (y este determina T). Por otro lado, si $L = +\infty$, f no es de orden exponencial.

Ejemplo 6 *Verificar que la función* $f(t) = t^3$ *tiene orden exponencial.*

Ejemplo 7 *Verificar que la función* $f(t) = e^{t^2}$ *no es de orden exponencial.*

No es difícil comprobar que cualquier polinomio de grado n o las funciones trigonométricas $\cos t$ y $\sin t$ son de orden exponencial, así como, las sumas y productos de una número finito de estas funciones

Las funciones que normalmente se encuentran al resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes son a la vez continuas a trozos[1] (por segmentos) y de orden exponencial. Las transformadas de Laplace de dichas funciones existen para valores de $\operatorname{Re} z$ suficientemente grandes, como muestra el siguiente resultado

Teorema 1.2.1 *Si* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *es continua a trozos*[2] *en* $[0, +\infty[$ *y tiene orden exponencial* γ*, entonces existe y es continua* $\mathcal{L}[f](z)$ *en*

$$D_\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > \gamma\}$$

Denotaremos por $\mathcal{E}_\gamma$ el conjunto de todas las funciones $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continuas a trozos y con crecimiento de orden exponencial γ. A la familia de todas las funciones continuas a trozos y de orden exponencial lo denotaremos por $\mathcal{E}$.

[1] Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) es **continua a trozos en un intervalo finito** $[a, b]$ si existe una partición $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que

(i) $f\,|_{]x_i, x_{i+1}[}$ es continua para todo $i = 0, 1, ..., n-1$.

(ii) La función f no está definida necesariamente en los extremos de los intervalos $]x_i, x_{i+1}[$ para todo $i = 0, 1, ..., n-1$.

(iii) Existen y son finitos los límites laterales $f\left(x_0^+\right)$, $f\left(x_1^-\right)$, $f\left(x_1^+\right), ...,$ $f\left(x_{n-1}^-\right)$, $f\left(x_{n-1}^+\right)$ y $f\left(x_n^+\right)$ donde $f\left(x^+\right) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(x + h)$ y $f\left(x^-\right) = \lim_{h \longrightarrow 0} f(x - h)$.

[2] No es necesario que la función f sea continua. Esto es de importancia ya que las entradas discontinuas (fuerzas impulsoras) son justamente aquellas para las que el método de la transformada de Laplace resulta de particular utilidad. Basta requerir que f sea continua por secciones en cada intervalo finito del rango $t \geq 0$.

Una función $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) es continua a trozos en $[0, +\infty[$ si para cada intervalo compacto $[0, b]$ se verifica que $f : [0, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) continua a trozos.

1.3. Propiedades de la transformada de Laplace

Un método burdo pero a veces efectivo para encontrar la transformadas inversas de Laplace, es construir una tabla de transformadas y luego usarla en sentido contrario para determinar las inversas. Generalmente no suele ser fácil determinar la función f para la cual F es su transformada de Laplace, pero existen una serie de propiedades que nos facilitaran el cálculo de dichas funciones.

1.3.1. Linealidad de la transformada de Laplace

Sean $f_1 \in \mathcal{E}_{\gamma_1}$ y $f_2 \in \mathcal{E}_{\gamma_2}$. Para cualesquiera números complejos ω y σ

$$\mathcal{L}\left[\omega f_1 + \sigma f_2\right](z) = \omega\mathcal{L}\left[f_1\right](z) + \sigma\mathcal{L}\left[f_2\right](z) \text{ para todo } z \in D_{\gamma_1} \cap D_{\gamma_2}.$$

Ejemplo 8 *Determinar la transformada de Laplace de las funciones* $f(t) = \operatorname{sen} t$ *y* $g(t) = \cos t$.

Ejemplo 9 *Determinar la transformada de Laplace de la función* $\sinh t$ *y* $\cosh t$

Ejemplo 10 *Determinar la transformada de Laplace de la función* $8 + e^{4t} - \frac{1}{2}\sin t$.

1.3.2. Cambio de escala

Dado $\alpha > 0$ consideremos la función

$$g(t) = f(\alpha t)$$

para $t > 0$. Notar que g se obtiene a partir de un cambio de escala en f, lo que implica contraer la gráfica de f hacia cero si $\alpha > 1$ o expandirla si $\alpha < 1$.

Si $f \in \mathcal{E}_\gamma$, entonces

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right](z) = \alpha^{-1}\mathcal{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{z}{\alpha}\right) \text{ para todo } \frac{z}{\alpha} \in D_\gamma.$$

Ejemplo 11 *Determinar la transformada de Laplace de la función* $\operatorname{sen}(\alpha t)$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$

Ejemplo 12 *Determinar la transformada de Laplace de la función* $\cosh(\alpha t)$ *con* $\alpha \in \mathbb{R}$

1.3.3. Transformada de Laplace de la derivada

Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$ derivable (y por tanto continua) de forma que $f' : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ sea continua a trozos, entonces

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right](z) = z\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) - f(0) \text{ para todo} z \in D_\gamma \tag{1.4}$$

En general, si f es derivable hasta el orden n en $[0, +\infty[$, se tiene para todo $z \in D_\gamma$

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right](z) = z^n\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - ... - f^{n-1)}(0)$$

Ejemplo 13 *Determinar la transformada de Laplace de* $f(t) = \cos\alpha t$ *haciendo uso de*

$$\mathcal{L}\left[\sin\alpha t\right](z) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + z^2}$$

para todo $\operatorname{Re} z > 0$.

1.3.4. Derivada de la transformada de Laplace

Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$, entonces,

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) = -\mathcal{L}\left[t \cdot f(t)\right](z) \text{ si } \operatorname{Re} z > \gamma. \tag{1.5}$$

Mediante un proceso inductivo es sencillo deducir que

$$\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) = (-1)^n\mathcal{L}\left[t^n \cdot f(t)\right](z) \text{ si } \operatorname{Re} z > \gamma.$$

Ejemplo 14 *Determinar* $\mathcal{L}\left[t\sin\alpha t\right](z)$.

1.3.5. Transformada de Laplace de la integral

Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$. Entonces

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right](z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}[f(t)](z) \qquad \text{si } \operatorname{Re} z > \rho = \max\{0,\gamma\}.$$

1.3.6. Transformada de Laplace de la convolución

Sean f, $g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones que consideraremos definidas en todo $\mathbb{R}$ tomando $f(t) = g(t) = 0$ para todo $t < 0$. Definimos la convolución de f y g como la función

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)\,g(s)\,ds = \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds.$$

Puede verse con el cambio de variable $y = t - s$ que $f * g = g * f$.

Ejemplo 15 *Verificar que* $t * t^2 = t^2 * t$.

Sean f, $g \in \mathcal{E}_\gamma$, entonces

$$\mathcal{L}[f * g(t)](z) = \mathcal{L}[f(t)](z) \cdot \mathcal{L}[g(t)](z) \ \text{ si } \operatorname{Re} z > \gamma$$

1.3.7. Propiedades de traslación

Primera propiedad de traslación

Sea $w \in \mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{E}_\gamma$

$$\mathcal{L}\left[e^{wt} f(t)\right](z) = \mathcal{L}[f(t)](z - w) \qquad \text{si } \operatorname{Re} z > \gamma + \operatorname{Re} w$$

A partir de este resultado podemos obtener la siguiente tabla de transformadas de Laplace:

$f(t)$		$\mathcal{L}[f(t)](z)$	D_γ
1		$\dfrac{1}{z}$	D_0
$e^{\omega t}t^n$ para $n = 0, 1, 2, ...$y $\omega \in \mathbb{C}$		$\dfrac{n!}{(z-\omega)^{n+1}}$	D_ω
$e^{\omega t}\sin(\alpha t)$	$\alpha \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathbb{C}$	$\dfrac{\alpha}{(z-\omega)^2+\alpha^2}$	D_ω
$e^{\omega t}\cos(\alpha t)$	$\alpha \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathbb{C}$	$\dfrac{z-\omega}{(z-\omega)^2+\alpha^2}$	D_ω
$e^{\omega t}\sinh(\alpha t)$	$\alpha \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathbb{C}$	$\dfrac{\alpha}{(z-\omega)^2-\alpha^2}$	$D_{\|\alpha\|+\omega}$
$e^{\omega t}\cosh(\alpha t)$	$\alpha \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathbb{C}$	$\dfrac{z-\omega}{(z-\omega)^2-\alpha^2}$	$D_{\|\alpha\|+\omega}$

Función de Heaviside

Consideremos la función continua a trozos $u_a : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, siendo $a \geq 0$, definida por

$$H(t-a) = u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 & \text{si} \quad t \geq a \end{cases}$$

Esta función se conoce en ingeniería con el nombre, de función de Heaviside (o función escalón unitario).

Físicamente realiza la función de interruptor ya que si f es una función continua se tiene que

$$f(t) \cdot u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ f(t) & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}$$

lo que representa que la función $u_a(t)$ "enciende" a la función o señal $f(t)$ en el instante de tiempo $t = a$.

Adicionalmente, si consideramos $0 \leq a < b$ y la función $u_a(t) - u_b(t)$, esta tiene la forma

$$u_a(t) - u_b(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin [a,b[\\ \\ 1 & \text{si} \quad t \in [a,b[\,. \end{cases}$$

consecuentemente, la función $u_b(t)$ tiene el efecto físico de "apagar" la función f, ya que

$$f(t) \cdot [u_a(t) - u_b(t)] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ \\ f(t) & \text{si} \quad a \leq t < b \\ \\ 0 & \text{si} \quad b \leq t. \end{cases}$$

Además de estas interpretaciones físicas, la función de Heaviside es útil para describir funciones continuas a trozos que a su vez sean continuas por la derecha. Por ejemplo la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ \\ t-1 & \text{si} \quad 1 \leq t < 3 \\ \\ \sin t & \text{si} \quad 3 \leq t. \end{cases}$$

puede escribirse como

$$f(t) = t\,(u_0(t) - u_1(t)) + (t-1)\,(u_1(t) - u_3(t)) + \sin t u_3(t)$$

Determinemos ahora la transformada de Laplace de la función de Heaviside $u_a(t)$ siendo $a \geq 0$. Por definición

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u_a(t)](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \cdot u_a(t)\,dt = \int_a^{+\infty} e^{-zt} dt = \\ &= \lim_{R \longrightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-bt}}{z} \right]_{t=a}^{t=R} = \begin{cases} \frac{e^{-za}}{z} - \lim\limits_{R \longrightarrow +\infty} \frac{e^{-zb}}{z} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ \\ \text{No existe} & \text{si} \quad z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y, claramente

$$\mathcal{L}[u_a(t)](z) = \frac{e^{-za}}{z} \qquad \text{si } \operatorname{Re} z > 0.$$

Observar que

$$\mathcal{L}[u_0(t)](z) = \mathcal{L}[1](z)\,.$$

Ejemplo 16 *Determinar la transformada de Laplace de la función*

$$f(t) = \begin{cases} 3 & si \quad t < 2 \\ \\ -1 & si \quad 2 \leq t < 5 \\ \\ 7 & si \quad 5 \leq t. \end{cases}$$

Segunda propiedad de traslación

Sea $a > 0$. Entonces para todo $z \in \mathcal{D}_f$ se tiene

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\,u_a(t)\right](z) = e^{-az}\mathcal{L}\left[f(t)\right](z)$$

Ejemplo 17 *Determinar la transformada de Laplace de la función*

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \leq t < 1 \\ \\ 0 & si \quad t \geq 1 \end{cases}$$

1.3.8. Transformadas de Laplace de funciones periódicas

Diremos que una función $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ es periódica de periodo $T > 0$ si

$$f(t+T) = f(t)$$

para todo $t \in D$. Las funciones periódicas pueden representarse como una serie infinita de términos que involucran funciones escalonadas.

Ejemplo 18 *Calculemos la transformada de Laplace de la función de donde cuadrada*

$$f(t) = \begin{cases} K & si \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}T \\ \\ -K & si \quad \frac{1}{2}T \leq t < T \end{cases} \qquad y \qquad f(t) = f(t+T)$$

El método usado anteriormente puede usarse para comprobar el siguiente teorema que provee una expresión explícita para la transformada de Laplace de una función periódica. Si $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{C}$ tiene periodo $T>0$ y es continua por segmentos en $[0,T]$, entonces

$$\mathcal{L}[f(t)](z)=\frac{1}{1-e^{-zT}}\int_0^T e^{-zT}f(t)\,dt$$

o, en términos de la función escalón

$$\mathcal{L}[f(t)](z)=\frac{1}{1-e^{-zT}}\mathcal{L}[f_1(t)](z) \tag{1.6}$$

donde

$$f_1(t)=f(t)(u_0(t)-u_T(t))$$

Ejemplo 19 *Confirmar el resultado obtenido en (18)*

Ejemplo 20 *Determinar la transformada de Laplace de la semi onda rectificada definida por*

$$f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen} wt & si\quad 0\le t<\dfrac{\pi}{w}\\[2ex] 0 & si\quad \dfrac{\pi}{w}\le t<\dfrac{2\pi}{w}\end{cases}\qquad y\qquad f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=f(t)$$

1.4. Teoremas de la Transformada de Laplace

Los resultados que vemos a continuación hacen alusión a aspectos cualitativos de la Transformada de Laplace de funciones de la clase $\mathcal{E}$.

1.4.1. Comportamiento de la transformada de Laplace en el infinito

Sea $f\in\mathcal{E}_\gamma$. Dado $z\in D_\gamma$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}[f(t)](z)| &= \left|\int_0^{+\infty}e^{-zt}f(t)\ dt\right|=\lim_{R\longrightarrow+\infty}\left|\int_0^{R}e^{-zt}f(t)\ dt\right|\\
&\le \lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_0^R\left|e^{-zt}f(t)\right|\ dt\le\lim_{R\longrightarrow+\infty}M\int_0^R\left|e^{-zt}e^{\gamma t}\right|\ dt\\
&= M\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_0^R e^{(\gamma-\operatorname{Re}z)t}\ dt=M\lim_{R\longrightarrow+\infty}\frac{e^{(\gamma-\operatorname{Re}z)t}}{\gamma-\operatorname{Re}z}\Big|_{t=0}^{t=R}\\
&= \frac{M}{\gamma-\operatorname{Re}z}\lim_{R\longrightarrow+\infty}\left(e^{(\gamma-\operatorname{Re}z)R}-1\right)=\frac{M}{\operatorname{Re}z-\gamma}
\end{aligned}$$

de la desigualdad anterior es evidente que, si hacemos tender $\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty$, entonces

$$\lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty} \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right) = 0.$$

Este hecho nos aporta más información sobre las funciones de variable compleja que son transformadas de Laplace de funciones de $\mathcal{E}_\gamma$. Se trata de funciones holomorfas en el semiplano D_γ que además tienden a cero cuando $\operatorname{Re} z$ tiende a $+\infty$. Esto nos permite afirmar que ciertas funciones holomorfas en semiplanos no proceden de la transformada de Laplace de una función de variable real. Por ejemplo, la función

$$F\left(z\right) = \frac{\left(z^2+1\right)\cos z}{z-1}$$

a pesar de ser holomorfa en D_1, no puede obtenerse como transformada de Laplace de ninguna función $f \in \mathcal{E}_\gamma$, dado que el límite de F cuando $\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty$ en D_1 no es igual a cero.

1.4.2. Teorema del valor inicial

Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$ derivable de forma que $f' \in \mathcal{E}_\gamma$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty} z\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right) &= \lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty} \left(f\left(0\right) + \mathcal{L}\left[f'\left(t\right)\right]\left(z\right)\right) \\ &= f\left(0\right) + \lim_{\operatorname{Re} z \longrightarrow +\infty} \mathcal{L}\left[f'\left(t\right)\right]\left(z\right) = f\left(0\right). \end{aligned}$$

Este resultado completa el obtenido anteriormente. Éste restringe aún más las funciones que son transformadas de Laplace de funciones. Por ejemplo, la función

$$\frac{1}{\sqrt{z}}$$

no puede ser la transformada de Laplace de una función ya que

$$\lim_{\operatorname{Re} \longrightarrow +\infty} \frac{z}{\sqrt{z}} = \lim_{\operatorname{Re} \longrightarrow +\infty} \sqrt{z} = \infty$$

1.4.3. Teorema del valor final

Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$ derivable de forma que $0 \in D_\gamma$. Si existe y es finito el límite $\lim_{t \longrightarrow +\infty} f\left(t\right)$, entonces

$$\lim_{z \longrightarrow 0} z\mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right]\left(z\right) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} f\left(t\right).$$

1.5. La transformada Inversa de Laplace

Supongamos que la función $f(t)$ se determina a partir de un PC. El operador de Laplace L se usa para transformar el problema original en uno nuevo donde nos encontraremos con la transformada $\mathcal{L}[f(t)](z)$. Si la transformación es efectiva, el nuevo problema deberá ser más sencillo que el original. Primero encontraremos $F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$ y luego obtenemos $f(t)$ a partir de $F(z)$. Por lo tanto, será deseable desarrollar métodos para determinar la función objetivo $f(t)$ cuando se conoce su transformada $F(z)$.

Si $F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$ decimos que $f(t)$ es **la transformada inversa de Laplace**, o **una** transformada inversa de $F(z)$ y escribimos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t).$$

Como

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\ dt$$

de inmediato se deduce que una transformada inversa no es única. Por ejemplo, las funciones dadas por

$$f(t) = e^{-2t} \qquad \text{y} \qquad g(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \neq 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

verifican que

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[g(t)](z) = \frac{1}{z+2}.$$

En los problemas que trataremos, se requiere que la inversa $f(t)$ sea continua para $t \geq 0$, o que sea continua por secciones con valores de $f(t)$ especificados en los puntos de discontinuidad. En estos casos podremos garantizar que $f(t)$ será única.

1.5.1. Propiedades

Veamos ahora algunas propiedades de la transformada de Laplace que nos facilitará el cálculo de la misma:

Linealidad

Para cualesquiera números complejos ω y σ

$$\mathcal{L}^{-1}[(\omega F_1 + \sigma F_2)(z)](t) = \omega \mathcal{L}^{-1}[F_1(z)](t) + \sigma \mathcal{L}^{-1}[F_2(z)](t).$$

Ejemplo 21 *Determinar*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{(z+2)^4}\right](t).$$

Ejemplo 22 *Determinar la transformada inversa de Laplace de la función*

$$F(z) = \frac{5}{z-6} - \frac{6z}{z^2+9} + \frac{3}{2z^2+8z+10}.$$

Ejemplo 23 *Determinar*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3z+2}{z^2+2z+10}\right](t).$$

Segunda propiedad de traslación

Sea $a > 0$. Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-az}F(z)\right](t) = u_a(t)\cdot f(t-a).$$

Ejemplo 24 *Determinar la transformada inversa de Laplace de* $\dfrac{e^{-3z}}{z^3}$

Ejemplo 25 *Determinar la transformada inversa* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t)$ *de Laplace de*

$$F(z) = \frac{2}{z^2} - \frac{2e^{-2z}}{z^2} - \frac{4e^{-2z}}{z} + \frac{ze^{-\pi z}}{z^2+1}$$

Convolución

Se verifica

$$\mathcal{L}^{-1}[F(z)\,G(z)](t) = f * g(t).$$

Ejemplo 26 *Determinar la transformada inversa de Laplace de*

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^2}$$

1.5.2. Cálculo de la transformada inversa de Laplace de funciones racionales

Si se presenta el problema de calcular la transformada inversa de Laplace de una función racional se procederá descomponiendo la función como suma de funciones racionales simples de la misma forma que se introdujo el curso pasado a la hora de calcular primitivas de funciones racionales. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 27 *Determinar la transformada inversa de Laplace de*

$$F(z) = \frac{1}{z^2 (z+2)^2}$$

Ejemplo 28 *Determinar la transformada inversa de Laplace de la función*

$$F(z) = \frac{7s-1}{(z+1)(z+2)(z-3)}.$$

Ejemplo 29 *Determinar la transformada inversa de Laplace de la función*

$$F(z) = \frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2 (z+3)}.$$

Ejemplo 30 *Determinar la transformada inversa de Laplace de la función*

$$F(z) = \frac{2z^2+10z}{(z^2-2z+5)(z+1)}.$$

1.5.3. Cálculo mediante la fórmula de inversión compleja

Sean P y Q dos funciones polinómicas con $\deg Q \geq 1 + \deg P$. Si $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, ..., z_n\}$ y existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que F es holomorfa en D_γ, entonces

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = F(z) \text{ para todo } z \in D_\gamma$$

donde

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}\left(e^{tz} F(z), z_i\right) \text{ para } t \geq 0.$$

Ejemplo 31 *Determinar la transformada inversa de Laplace de*

$$F(z) = \frac{1}{z^2 (z+2)^2}$$

1.6. Aplicaciones de la transformada de Laplace

$$\begin{array}{ccc} \text{Problema original} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \text{Problema transformado} \\ & & \downarrow \\ \begin{array}{c}\text{Solución}\\ \text{del}\\ \text{Problema original}\end{array} & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & \begin{array}{c}\text{Solución}\\ \text{del}\\ \text{Problema transformado}\end{array} \end{array}$$

1.6.1. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

Recordar que una ecuación diferencial lineal de orden uno con coeficientes constantes es una expresión de la forma

$$y' + ay = f(t),$$

si calculamos su transformada de Laplace, suponiendo que $y \in \mathcal{E}$, obtenemos la relación

$$zY(z) - y(0) + aY(z) = F(z),$$

como consecuencia de la linealidad, de donde se obtiene que

$$Y(z) = \frac{y(0) + F(z)}{z+a},$$

y consecuentemente la solución del problema original será

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{y(0) + F(z)}{z+a}\right](t).$$

Ejemplo 32 *Resolver la EDL*

$$y' - y = t. \tag{1.7}$$

Una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes es una expresión de la forma

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + ... + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = f(t)$$

donde

- $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 0, 1, ..., n$.
- $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un intervalo I (denominada término independiente de la ecuación).
- $y(t)$ es una función desconocida (la función incógnita) que debemos calcular.
- $y^{(k)}$ es la derivada de orden k de la función incógnita..

Suponiendo que y,$f \in \mathcal{E}$ y que y es continua podremos determinar las soluciones

---

Ejemplo 33 *Resolver el siguiente problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t + t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 34 ***Problema con función discontinua***
Resolver el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} t & si \quad 0 \le t < \pi \\ \cos(2t) & si \quad \pi \le t. \end{cases}$$

Ejemplo 35 *Resolver el siguiente problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + y = \cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

1.7. Ejercicios propuestos

1. Utilizar la identidad $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ para obtener las Transformadas de Laplace de $\cos^2 kt$ y $\sin^2 kt$

2. Determinar $\mathcal{L}[f_i(t)](z)$ para $i = 1, 2, 3, 4$ donde

$$f_1(t) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad 0 \le t < 1, \\ 3 & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < 2, \\ t & \text{si} \quad t \ge 2. \end{cases}$$

3. La función de onda triangular, que denotaremos por $T(t, c)$, viene dada por

$$T(t, c) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \le t < c, \\ 2c - t & \text{si} \quad c \le t < 2c \end{cases} \qquad \text{y} \qquad T(t + 2c, c) = T(t, c)$$

   Dibujar esta función y determinar su Transformada de Laplace.

4. Dibujar la gráfica de la función $g(t) = e^t$ siendo $0 \le t < c$ tal que $g(t + c) = g(t)$. Determinar su Transformada de Laplace.

5. Determinar la Transformada Inversa de Laplace de las siguientes funciones

$$F_1(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 8} \quad F_2(z) = \frac{z}{z^2 + 6z + 13}$$

$$F_3(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 4} \quad F_4(z) = \frac{3z + 1}{z^2 + 6z + 13}$$

6. Resolver cada uno de los siguientes problemas de valor inicial por medio del método de la Transformada de Laplace. Verificar la solución.

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{l} y' = e^t, \\ y(0) = 2. \end{array}\right. \qquad (b)\quad \left\{\begin{array}{l} y'' + a^2 y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{array}\right.$$

$$(c)\quad \left\{\begin{array}{l} y'' + y = e^{-t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{array}\right. \qquad (d)\quad \left\{\begin{array}{l} y'' - 4y' + 4y = 4e^{2t}, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = -4. \end{array}\right.$$

$$(e)\quad \left\{\begin{array}{l} y'' + 3y' + 2y = 4t^2, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{array}\right.$$

7. Representar la gráfica de las siguientes funciones para $t \geq 0$

   a) $f_1(t) = u_a(t)$.
   b) $f_2(t) = (t-3)\, u_3(t)$.
   c) $f_3(t) = t^2 - t^2 u_2(t)$.

8. Determinar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones utilizando la función de Heaviside

$$f_1(t) = \left\{\begin{array}{lll} 3 & \text{si} & 0 \leq t < 1, \\ t & \text{si} & t \geq 1. \end{array}\right. \qquad f_2(t) = \left\{\begin{array}{lll} \sin 3t & \text{si} & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si} & t \geq \frac{1}{2}\pi. \end{array}\right.$$

$$f_3(t) = \left\{\begin{array}{lll} t^2 & \text{si} & 0 \leq t < 2, \\ 3 & \text{si} & t \geq 2. \end{array}\right. \qquad f_4(t) = \left\{\begin{array}{lll} t^2 & \text{si} & 0 \leq t < 1, \\ 3 & \text{si} & 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{si} & t \geq 2. \end{array}\right.$$

9. Determinar

   a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{5e^{-3z}}{z} - \dfrac{e^{-z}}{z}\right](t)$.
   b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-4z}}{(z+2)^3}\right](t)$.

10. Resolver los siguientes problemas de valor inicial usando la Transformada de Laplace. Verificar la solución.

$a)\ \begin{cases} y'' + y = f_1(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ donde $f_1(t) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad 0 \le t < 2, \\ t+2 & \text{si} \quad t \ge 2. \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} y'' + y = f_2(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ donde $f_2(t) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \le t < 4, \\ 2t-5 & \text{si} \quad t \ge 4. \end{cases}$

11. Determinar $y\left(\frac{1}{2}\pi\right)$ y $y\left(2+\frac{1}{2}\pi\right)$ para la función $y(t)$ que satisface el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + y = (t-2)\,u_2(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

12. Determinar las siguientes Transformadas de Laplace mediante el Teorema de convolución

$$F_1(z) = \frac{1}{z(z^2+k^2)} \qquad\qquad F_2(z) = \frac{4}{z^2(z-2)}$$

13. Resolver los siguientes problemas de valor inicial utilizando el Teorema de convolución.

$$(a) \quad \begin{cases} y'' + 2y' + y = f_1(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} y'' - k^2 y = f_2(t), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

1.8. Ejercicios complementarios

1. Determinar $\mathcal{L}[g_i(t)](z)$ para $i = 1,2,3,4$ donde

$$g_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t < 1, \\ t & \text{si} \quad 1 \le t < 2, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 2. \end{cases} \qquad g_2(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{si} \quad 0 \le t < \pi, \\ 0 & \text{si} \quad t \ge \pi. \end{cases}$$

2. Dibujar la gráfica de la función $h(t) = 1 - t$ siendo $0 \le t < 1$ tal que $h(t+1) = h(t)$. Determinar su Transformada de Laplace.

3. Determinar la Transformada Inversa de Laplace de las siguientes funciones

$$G_1(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 10} \qquad G_2(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 13}$$

$$G_3(z) = \frac{z^2}{(z-1)^4} \qquad G_4(z) = \frac{2z-3}{z^2 - 4z + 8}$$

$$G_5(z) = \frac{2z+3}{(z+4)^3}$$

4. Resolver cada uno de los siguientes problemas de valor inicial por medio del método de la Transformada de Laplace. Verificar la solución.

$$(a) \quad \begin{cases} y' - y = e^{-t}, \\ y(0) = 1. \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} y'' + y' - 2y = -4, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3. \end{cases} \qquad (d) \quad \begin{cases} y'' + 9y = 40e^{t}, \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} \frac{1}{4}y'' - y' + y = \cos 2t, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

5. Representar la gráfica de las siguientes funciones para $t \geq 0$

   a) $g_1(t) = \sin(t - \pi)\, u_\pi(t)$.
   b) $g_2(t) = (t-3)^2\, u_3(t)$.
   c) $g_3(t) = t^2 - (t-1)^2\, u_1(t)$.

6. Determinar la Transformada de Laplace de las siguientes funciones utilizando la función de Heaviside

   a) $g_1(t) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad t \in [0, 2[\,, \\ 2t - 1 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\,. \end{cases}$

   b) $g_2(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si} \quad t \in [0, 2[\,, \\ 0 & \text{si} \quad t \in [2, +\infty[\,. \end{cases}$

$$c)\ \ g_3(t)=\begin{cases} t^2 & \text{si} \quad t\in[0,2[\,, \\ t-1 & \text{si} \quad t\in[2,3[\,, \\ 7 & \text{si} \quad t\in[3,+\infty[\,. \end{cases}$$

$$d)\ \ g_4(t)=\begin{cases} \sin(3t) & \text{si} \quad t\in[0,\pi[\,, \\ 0 & \text{si} \quad t\in[\pi,+\infty[\,. \end{cases}$$

7. Determinar

   $a)$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{e^{-3z}}{(z+1)^3}\right](t)$.

   $b)$ $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\left(1-e^{-2z}\right)\left(1-3e^{-2z}\right)}{z^2}\right](t)$

8. Resolver los siguientes problemas de valor inicial usando la Transformada de Laplace. Verificar la solución.

   $$a)\ \begin{cases} y''+y=g_1(t)\,, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=1. \end{cases} \qquad \text{donde } g_1(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\le t<\frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad t\ge\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

   $$b)\ \begin{cases} y''+4y=g_2(t)\,, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=0. \end{cases} \qquad \text{donde } g_2(t)=\sin t-u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi).$$

9. Determinar $y(1)$ y $y(4)$ para la función $y(t)$ que satisface el problema de valor inicial

   $$\begin{cases} y''+2y'+y=2+(t-3)\,u_3(t)\,, \\ y(0)=2, \\ y'(0)=1. \end{cases}$$

10. Determinar las siguientes Transformadas de Laplace mediante el Teorema de convolución

    $$G_1(z)=\frac{1}{z(z+2)} \qquad\qquad G_2(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$$

11. Resolver los siguientes problemas de valor inicial utilizando el Teorema de convolución.

    $$(c)\ \begin{cases} y''+4y'+13y=g_1(t)\,, \\ y(0)=0, \\ y'(0)=0. \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} y''+6y'+9y=g_2(t)\,, \\ y(0)=A, \\ y'(0)=B. \end{cases}$$

12. **CIRCUITOS ELECTRICOS**

Las dos leyes de Kirchhoff establecen

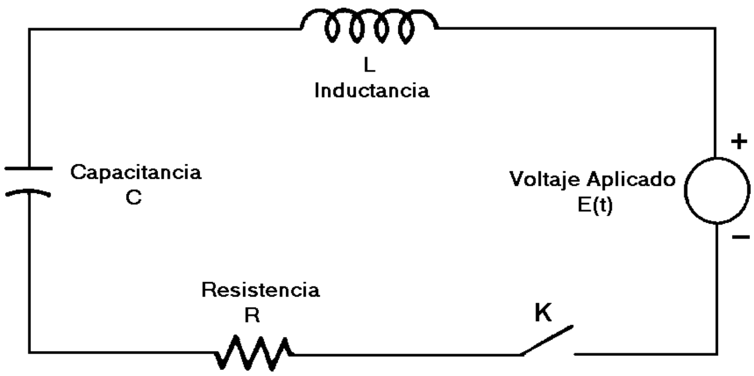
Ley 1: La suma algebraica de todas las corrientes que entran a una unión (o nodo) de un circuito es cero.

Ley 2: La suma algebraica de la caída de (potencial) voltaje en cada malla del circuito es cero.

Las expresiones de la caída de potencial a través de cada uno de los elementos del circuito se recogen en la siguiente tabla

Elemento	Fórmula
Resistencia	$RI = R\dfrac{dQ}{dt}$
Inductor	$L\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$
Condensador	$\dfrac{Q}{C}$
Generador	$-E$

El circuito RLC de la siguiente figura



está formado por una resistencia R, un condensador C y un inductor L conectado en serie a una fuente de voltaje $v(t)$. Antes de cerrar el interruptor en el tiempo $t = 0$, tanto la carga en el condensador como la corriente resultante en el circuito son cero. Determinar la carga $q(t)$ en el condensador y la corriente resultante $i(t)$ en el circuito en el tiempo T sabiendo que $R = 160\Omega$ (ohms), $L = 1H$ (Henrys), $c = 10^{-4}F$ (Faradios) y $v(t) = 20V$ (voltios).